Esame di Stato 2018/19

Soluzione problema 1 seconda prova

Alessandro Gambini[1], Elisa Garagnani[2], and Giovanni Organtini[3]

[1]Università di Bologna

[2]Istituto di Istruzione Superiore Archimede

[3]Sapienza Università di Roma

20 giugno 2019

Problema 1

Punto 1

La funzione $g(x)$ è sempre continua su tutto $\mathbb{R}$ e per ogni a e b con $a \neq 0$, possiede sempre un valore positivo e uno negativo, determinato dal segno del fattore $(ax+b)$. Il fatto che

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0,$$

è sufficiente per stabilire che g ha un massimo e un minimo assoluto.

D'altra parte possiamo arrivare alla stessa conclusione studiando la derivata prima della funzione:

$$g'(x) = e^{2x-x^2}(a + (2-2x)(b+ax))$$

Il segno di $g'(x)$ è quello del polinomio $a + (2-2x)(b+ax)$, il cui discriminante è

$$\frac{\Delta}{4} = (a-b)^2 + 2a(a+2b) = 3a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + (a+b)^2 > 0.$$

Dunque per ogni a e b la derivata prima ha due zeri nei quali la derivata cambia segno: in uno passa da negativo a positivo (che corrisponde al punto di minimo) e nell'altro passa da positivo a negativo (che corrisponde al massimo).

Affinchè le funzioni si intersechino in $A(2,1)$ entrambe devono passare per tale punto:

$$f(2) = 4a + b - 2 \qquad g(2) = 2a + b.$$

Basta quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4a + b - 2 = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $a = 1$ e $b = -1$.

Punto 2

Il grafico di $f(x)$ è una parabola con vertice in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, passante per $B(0,-1)$. In particolare $f'(x) = 2x - 1$ quindi $f'(0) = -1$.

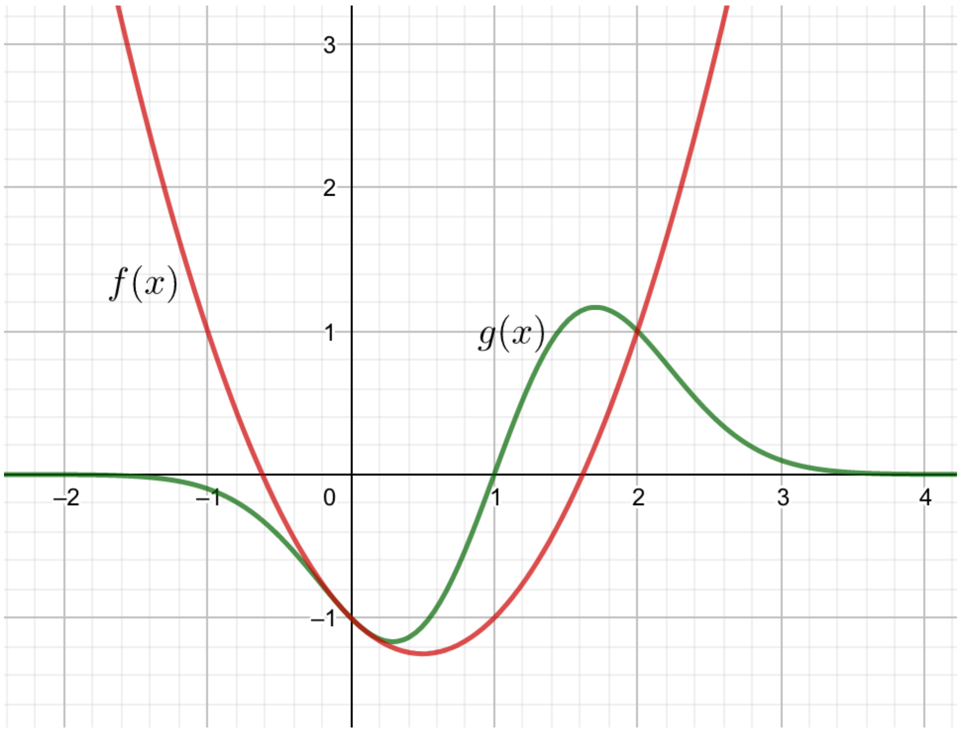

Figura 1: Grafico di f e g per $a = 1$ e $b = -1$

D'altra parte anche $g(0) = -1$ e

$$g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2 + 4x - 1)$$

pertanto anche $g'(0) = -1$ e quindi i due grafici sono tangenti nel punto $B(0, -1)$.

Il grafico di $g(x)$ possiede un centro di simmetria in $(1, 0)$ infatti la funzione $h(x) = g(x + 1) = xe^{1-x^2}$ è una funzione dispari.

Le due curve si incontrano anche in $A(2, 1)$ (vedi punto 1) e l'area richiesta (che indichiamo sempre con S) è

$$S = \int_0^2 (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_0^2 \left((x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left((x-1)e^{2x-x^2}\right) \mathrm{d}x - \int_0^2 (x^2 - x - 1)\mathrm{d}x$$

Il grafico di $g(x)$ ha una simmetria centrale rispetto a $(1, 0)$ quindi $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 0$,

$$S = 0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Punto 3

La corrente i_1 è entrante nel piano del foglio. Il campo magnetico generato da questa corrente dunque, per la regola della mano destra, è tale per cui le sue linee di forza sono circonferenze parallele al piano Oxy, centrate in P_1 e con verso orario.

Anche i_2 e i_3 generano ciascuna un campo magnetico, le cui linee di forza sono circonferenze centrate, rispettivamente, in P_2 e in P_3 orientate secondo il verso delle correnti.

La circuitazione $\mathcal{C}$ del campo magnetico $\mathbf{B}$ lungo il contorno di S è facilmente calcolabile utilizzando il Teorema di Ampère, secondo il quale

$$\mathcal{C} = \mu_0 \sum_i i_i \, ,$$

dove la somma sulle correnti è estesa solamente alle cosiddette *correnti concatenate*, che sono quelle che attraversano la superficie S. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m è la permeabilità magnetica del vuoto (il testo non dice che il sistema si trova nel vuoto e in questi casi si può assumere che sia cosí). Di fatto, dunque, la corrente i_3, che non attraversa la superficie S, non contribuisce affatto alla circuitazione.

La corrente i_1 certamente attraversa la superficie. La corrente i_2 si trova molto vicina al bordo di questa, quindi vale la pena controllare se è concatenata. Per farlo calcoliamo l'ordinata della funzione $g(x)$ per $x = \frac{3}{2}$, che vale $g(x) \simeq 1.06 > 1$, quindi di sicuro il punto P_2 è all'interno.

La circuitazione del campo magnetico lungo il contorno di S dunque vale

$$\mathcal{C} = \mu_0 \left(i_1 + i_2\right)$$

Poiché μ_0 e i_1 sono costanti, la circuitazione è una funzione di i_2 che è negativa se ha verso opposto a quello di i_1 (uscente dal foglio) e positiva altrimenti (entrante nel foglio). Il grafico di $\mathcal{C}(i_2)$ in funzione di i_2 è una retta di pendenza pari a μ_0, che per $i_2 = 0$ vale

$$\mathcal{C}(0) = \mu_0 i_1 = 8\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Tm}$$

(le unità si determinano facilmente dalla semplice analisi dimensionale della circuitazione e sapendo che tutte le grandezze sono espresse nel SI, nel quale i campi magnetici si misurano in Tesla (T), le correnti in Ampère (A) e le lunghezze in metri (m)).

La circuitazione è nulla quando

$$\mu_0 \left(i_1 + i_2\right) = 0$$

cioè per $i_2 = -i_1$. Per concludere, la circuitazione è indipendente da i_3. Per i_2 uscente dal piano del foglio con intensità di modulo superiore a 2 A, la circuitazione è negativa, altrimenti è positiva. Per $i_2 = 0$, la circuitazione vale $8\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Tm}$.

Punto 4

Applichiamo la legge sull'induzione e.m. di Faraday–Neumann–Lenz, per la quale in una spira conduttrice si manifesta una forza elettromotrice V indotta pari, in modulo, alla variazione del flusso del campo magnetico nell'unità di tempo. In formule

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(B)}{\mathrm{d}t}.$$

In questo caso, essendo la superficie piana e il campo uniforme,

$$\Phi_S(B) = SB\cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo formato tra la perpendicolare al piano della spira e il campo magnetico. Quest'angolo dipende dal tempo. Nell'istante in cui la spira giace sul piano Oxy l'angolo è nullo, mentre vale $\frac{\pi}{2}$ quando la spira ha compiuto un quarto di giro. Essendo ω costante abbiamo $\theta = \omega t$ e quindi

$$V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cos(\omega t)) = -BS\frac{\mathrm{d}\cos(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega BS\sin(\omega t)\,.$$

Il testo del problema ci dice che il massimo valore assoluto raggiunto dalla corrente, che per la Legge di Ohm è

$$I = \frac{V}{R}\,,$$

è di 5 mA. Questo significa che dobbiamo porre il valore massimo di V pari a $IR = 5 \times 10^{-3} \times 0,20 = 10^{-3}\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{mV}$. Anche in questo caso le unità di misura si possono determinare semplicemente sapendo che il prodotto di una corrente per una resistenza è una differenza di potenziale che si misura in volt. Il valore massimo di V si ottiene per $\sin \omega t = 1$ e quindi

$$IR = \omega BS$$

da cui si ricava

$$\omega = \frac{IR}{BS} = \frac{10^{-3}}{1,5 \times 10^{-2} \times \frac{4}{3}} = 0.05\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

$S = \frac{4}{3}\,\mathrm{m}^2$ è stata calcolata nel punto 2. Sapendo d'aver usato solo unità SI nei conti, il risultato non può che essere espresso in unità coerenti.